Лекция 8_Лензе-Тирринг есебіндегі орбитаның векторлық элементтеріне қатысты орнықтылық

Енді Линзе-Тирринг есебінде орбитаның векторлық элементтеріне қатысты орнықтылықты қарастырайық. Линзе-Тирринг есебінде орбиталық орнықтылықты қарастырған кезде біз $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлардың абсолютті мәндері тұрақты болатынын анықтадық. $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторларының бағыттарына келетін болсақ, олар уақыт өте келе өзгереді. $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлар $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналмалы қозғалысқа қатысады. Сонымен, сынақ денесінің айналмалы дене өрісіндегі қозғалысы, жалпы айтқанда, i көлбеу бұрышына қатысты орнықты және δ көтерілетін түйіннің бойлығына және σ перигелийдің көтерілетін түйіннен бұрыштық қашықтығына қатысты орнықсыз болады. Оларды табу үшін мына шартты аламыз. Дегенмен, векторлық элемент $\vec{M}$ сақталатын орбиталар бар екен, олар орбиталардың кеңістіктегі қатысты бағдары болып табылатын осы векторлық элементке қатысты орнықты болып табылады екен.

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4}\vec{M}\right\} -$$
$$- \frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0 M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\} \tag{1}$$

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0\,. \tag{2}$$

сонда

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0,\ \vec{M} = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Орбиталардың өздері қандай болады? Осы сұраққа жауап беру үшін $\vec{\Omega}$ үшін жазылған (1) өрнекке (2) орнықтылық шартын жазамыз

$$\left[\vec{M}\cdot\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0\right\}\right] = 0\,. \tag{4}$$

Бұл мынадай жағдайда орын алады:

1. $\vec{M} = 0$, яғни орбита центрі арқылы өтетін түзу сызықтарға айналады.
2. $\vec{S}_0 = 0$, орталық симметриялы өрістегі сынақ денесінің қозғалысы мәселесіне, яғни Шварцшильд есебіне айналады. Бұл тапсырма үшін

$$\vec{M} = \mathrm{const},\ \ \vec{A} \neq \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

3. Мына шарт орындалса

$$14m_0M^2 = 3m(\vec{M}\vec{S}_0)\,. \qquad (6)$$

Немесе $\vec{M}$ жәнe $\vec{S}_0$ арасындағы бұрыштың косинусы арқылы

$$\cos\,\alpha_{\vec{M}\vec{S}_0} = \frac{14m_0M}{3mS_0}\,. \qquad (7)$$

Мұндай шарттардың орындалуы төмендегідей үлкен меншікті бұрыштық моменті бар экзотикалық астрофизикалық, мысалы, жылдам айналатын нейтрондық жұлдыздар және т.б. нысандар үшін мүмкін болады

$$S_0 \sim \frac{m_0}{m}M\,. \qquad (8)$$

4. $\vec{S}_0 \uparrow\uparrow \vec{M}$ немесе $\vec{S}_0 \uparrow\downarrow \vec{M}$ болғанда, яғни орталық айналмалы дененің экваторлық жазықтығында жататын дөңгелек орбиталар класына айналады.
Бұл есеп, аталған шарттарда, $\vec{M}$ векторлық элементке қатысты сынақ денесінің қозғалысының орнықтылығына мүмкіндік береді, бірақ, жалпы айтқанда, $\vec{A}$ векторлық элементке қатысты орнықтылыққа мүмкіндік бермейді.
Осы орайда, Кеплер есебінде екі векторлық элементке де қатысты материалдық бөлшек қозғалысының орнықтылығын қамтамасыз ететінін еске түсірейік.

$$\vec{M} = \text{const},\;\; \vec{A} = \text{const}\,. \qquad (9)$$

Сонымен, біз Кеплер есебі үшін $\vec{M} = \text{const},\; \vec{A} = \text{const}$; Шварцшильд есебі үшін $\vec{M} = \text{const},\; \vec{A} \neq \text{const}$, ал біз қарастырып отырған Лензе-Тирринг есебінде, жалпы айтқанда, $\vec{M} \neq \text{const},\; \vec{A} \neq \text{const}$ болады деген тұжырымға келдік.

Енді гамильтониан арқылы не жағдай орындалатынын қарастырайық. Кеплер есебі үшін гамильтониан

$$H = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2}\,. \qquad (10)$$

Бұл гамильтониан $\vec{M}$ векторлық элементіне де, $\vec{A}$ векторлық элементке де тәуелді емес, ол жүйенің M_0 инвариантына (немесе басқаша айтқанда, E энергиясына) тәуелді екенін ескерейік. Үлкен жартыөс [1] берілгендей

$$a = \frac{M_0^2}{m\alpha} \tag{11}$$

сонда (2.38) ескерсек, мынадай болады

$$H = mc^2 - \frac{\alpha^2}{2a} = mc^2 + E \tag{12}$$

Шварцшильд есебінің гамильтонианы

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{15m\alpha^4}{8M_0^2c^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3Mc^2} \tag{13}$$

Бұл гамильтониан тек $\vec{M}$ векторлық элементінің абсолют мәніне байланысты болады. Егер $\vec{M}$ жалпылама импульс ретінде қарастырылса, оған сәйкес g бұрыштық элемент мына теңдеуді қанағаттандырады

$$\frac{d\vec{g}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}} = \vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M_0^3Mc^2}\vec{M}\,. \tag{14}$$

осыдан, егер кеплерлік элементерге ауыссақ

$$\vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0}{Ta(1-e^2)c^2}\vec{e}_M\,, \tag{15}$$

$$\Delta g = \Omega \cdot T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}\,. \tag{16}$$

Сонымен, классикалық механикада Кеплер есебінде барлық орбиталар векторлық элементтерге қатысты орнықты және орнықтылық шарттары (9) түрінде болады. Мынадай мәселе, яғни Лензе-Тирринг есебінде (9) шарттарды қанағаттандыратындай орнықты орбиталар бар ма? Мұндай орбиталарды анықтау үшін біз мынадай әрекет жасап көрелік

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \tag{17}$$

немесе

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0, \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] = 0\,. \tag{18}$$

мұнда

$$\vec{\Omega}=\frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}}=\frac{3m\alpha^4}{M^3M_0^3c^2}\vec{M}+\frac{m^2\alpha^4}{m_0M^3M_0^3c^2}\left\{2\vec{S}_0-\frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0M^2}\vec{S}_0+\frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0M^4}\vec{M}\right\}-$$
$$-\frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0M^5M_0^3c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0)+\frac{m}{7m_0}S_0^2-\frac{3m}{7m_0M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\}$$
(19)

Бұл векторлық элементтерге қатысты релятивистік орбиталардың тұрақтылығының шарттары. Оларды жасауға болады, егер

$$\vec{\Omega}\uparrow\uparrow\vec{M},\quad A=0, \tag{20}$$

немесе

$$\vec{\Omega}\uparrow\downarrow\vec{M},\quad A=0. \tag{21}$$

немесе

$$1+\frac{2m^2(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0^2M^4}-\frac{m}{m_0M^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0)+\frac{m}{7m_0}S_0^2-\frac{3m}{7m_0M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\}=0;$$

$A=0;$

(22)

Соңғы шартты былай да жазуға болады

$$B(\vec{M}\vec{S}_0)^2+C(\vec{M}\vec{S}_0)+D=0,$$

$A=0;$

(23)

мұнда

$$B=\frac{5m^2}{7m_0^2M^4};C=-\frac{2m}{m_0M^2};D=1-\frac{m^2S_0^2}{7m_0^2M^2}. \tag{24}$$

Егер (19) өрнегін $(\vec{M}\vec{S}_0)$ қатысты шешсек, алатыеымыз

$$(\vec{M}\vec{S}_0)=\frac{7m_0M^2}{5m}\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{7}+\frac{5m^2S_0^2}{49m_0^2M^2}}\right);$$

$A=0;$

(25)

немесе $\vec{M}$ және $\vec{S}_0$ арасындағы бұрыштың косинусы арқылы

$$\cos\ \alpha_{\vec{M}\vec{S}_0} = \frac{7m_0M}{5mS_0}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{7} + \frac{5m^2S_0^2}{49m_0^2M^2}}\right).$$

$$A = 0;$$

(26)

Бұл шарт (7) сияқты экзотикалық астрофизикалық объектілер өрісінде егер (8) қатынасы орындалса мүмкін болады.

Сонымен, Лензе-Тирринг есебінде $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерге қатысты негізгі орнықты орбиталар орталық айналмалы дененің экваторлық жазықтығында айналатын орбиталар класы болып табылады.

Қорытындылай келе, (6) орнықтылық шарты тек ілгерілемелі қозғалыстың векторлық элементтерін есепке алатынын атап өтеміз. Біз бұл жағдайды қиындата аламыз. Шынында да, Кеплер мәселесі үшін, нақты айтқанда, келесі шарт бар

$$\vec{M} = \mathrm{const},\ \ \vec{A} = \mathrm{const},\ \ \vec{\omega} = 0, \qquad (27)$$

мұндағы $\vec{\omega}$ – меншікті бұрыштық жылдамдық. Сонда Шварцшильд есебі жағдайында бұл орнықтылық шартын тек радиалды бағытта жатқан түзу сызықтарға айналатын орбиталар ғана қанағаттандыра алады. Ендеше (27) шарт мынадай болады

$$\vec{M} = 0,\ \ \vec{A} = \mathrm{const},\ \ \vec{\omega} = 0 \qquad (28)$$

Қолданылған әдебиет

[1]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1973, 207 с.